

# 基于信号稀疏表示的形态成分分析: 进展和展望

李 映, 张艳宁, 许 星

(西北工业大学计算机学院, 陕西西安 710072)

**摘 要:** 有效的信号和图像分解(分离)技术在信号和图像的分析、增强、压缩、复原等领域起着重要的作用. 虽然目前研究者提出了很多方法来解决这个问题, 然而处理效果并不完美. 形态成分分析(Morphological Component Analysis, MCA) 是最新提出的一种基于稀疏表示的信号和图像分解(分离)方法. 该方法的主要思想是利用信号组成成分形态差异性(可以由不同的字典稀疏表示)进行分离. 本文详细描述了形态成分分析方法的理论思想, 并介绍了形态成分分析的最新研究进展及其存在的问题, 最后指出了进一步发展的方向.

**关键词:** 形态成分分析; 稀疏表示和分解; 超完备字典

**中图分类号:** TP317      **文献标识码:** A      **文章编号:** 0372-2112 (2009) 02-0146-07

## Advances and Perspective on Morphological Component Analysis Based on Sparse Representation

LI Ying, ZHANG Yan2ning, XU Xing

(Department of Computer Science and Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xi'an, Shaanxi 710072, China)

**Abstract:** The separation of signal and image content into semantic parts plays a key role in applications such as analysis, enhancement, compression, restoration, and more. Although many approaches have been proposed to tackle this problem in recent years, they have many disadvantages. Morphological Component Analysis(MCA) is a novel decomposition method based on sparse representation of signals and images. The main idea of MCA is to decompose a signal or image into its building blocks considering that there is morphological diversity among a signal or an image's components, which can be sparsely represented by different dictionaries. This paper introduces the theory of Morphological Component Analysis. Also, it describes the advances on morphological component analysis. Finally, several main problems have been pointed out and further research directions have been anticipated.

**Key words:** morphological component analysis; sparse representation and decomposition; overcomplete dictionary

### 1 引言

随着信号和图像处理技术的不断发展, 如何利用信号和图像的成分(如主成分、次成分、独立成分、稀疏成分、形态成分等)来表示信号和图像已成为很多信号和图像处理任务, 例如压缩、重构、抑噪和特征提取等的研究热点, 并有着相当重要的意义. 在信号和图像处理中, 通常认为观测值是由不同的源信号混合而成的. 最简单的混合模型是线性瞬时的, 可表示为  $X = AS + N$ , 其中  $X \in \mathbb{R}^m$  和  $S \in \mathbb{R}^n$  分别为观测信号和源信号,  $N \in \mathbb{R}^m$  是噪声,  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  是混合矩阵. 现在的问题是求解混合过程的逆过程从而把不同的源信号分离出来. 在盲

处理方法中, 已知观测信号  $X$ , 混合矩阵  $A$  和源信号  $S$  都是未知的, 要在很少的已知先验信息的情况下根据某些假设条件仅从混合信号中提取或恢复出源信号. 经典的独立成分分析(independent component analysis, ICA)方法假设源信号是独立统计的. 虽然目前 ICA 方法在许多应用中已证明是成功的<sup>[1,2]</sup>, 然而, ICA 基于统计独立的假设条件, 并不适用于所有的情况. 特别是在实际应用中, 很多信号或图像具有稀疏性, 或者可以对信号或图像进行适当的变换, 使其在变换域中具有较好的稀疏性. 当源信号是高度稀疏时, 这表示每个源信号只有很少的时刻取值为非零(或者较大), 而绝大多数时刻取值为零(或者接近零)<sup>[3]</sup>. 在这种情况下下的独立假设意味着

两个源信号同时为有用信号的概率极低, 因此源信号可以由不同的基函数来表示. 例如, 在稀疏成分分析(Sparse Component Analysis, SCA)中就利用了这一点<sup>[4,5]</sup>. 事实上, 论文[5]表明首先把数据转换为稀疏表示将极大地提高分离的质量.

最近, Starck 等人另辟新径, 提出了另外一种基于信号稀疏表示的分离方法)) 形态成分分析(Morphological Component Analysis, MCA)<sup>[6,7]</sup>. 该方法假设对于混和信号中的每一个源信号, 都存在着相对应的能够稀疏表示该源信号的字典, 并且认为该字典仅能稀疏表示该源信号, 对于其他源信号不能稀疏表示; 然后利用追踪算法来搜索最稀疏的表示将产生理想的分离效果. 本文介绍了有关形态成分分析的理论思想和最新进展, 希望引起大家的重视.

## 2 信号的稀疏表示和追踪算法

通过变换来表示信号由于在许多应用中具有简单性和有效性而一直受到重视. 传统的信号表示理论大多基于非冗余的正交基函数的变换, 如傅立叶变换、小波变换等. 但傅立叶变换无法表达信号的时频局域性质, 而小波变换虽在处理具有点状奇异性的信号时具有良好的特性, 但由一维小波张成的可分离小波只具有有限的方向, 不能/ 最优0 表示含线或者面奇异的高维函数. 为了更好地表示信号和图像, 最近几年, 在正交小波变换的基础上, 又提出了许多新的变换方法, 如脊波(Ridgelet)<sup>[8]</sup>、曲波(Curvelet)<sup>[9]</sup>、带波(Bandelet)<sup>[10]</sup>、轮廓波(Contourlet)<sup>[11]</sup>等变换. 基于这些变换, 普遍采用的是超完备(overcomplete) 冗余表示, 其基本思想是基函数用称之为字典的超完备的冗余函数系统取代, 字典中的元素被称为原子, 信号由原子的线性组合来表示. 其中原子的数目比信号的维数大(得多), 由此产生了冗余. 由于这种超完备性, 就有很多表示信号的方法, 其中具有最少系数(最稀疏)的表示是最简单的, 也是我们认为最优的一种表示方法.

对于任意信号  $s \in \mathbb{R}^N$ , 要想找到最稀疏的表示, 等同于解决下列问题<sup>[12]</sup>:

$$(P_0) \min_{\mathbf{u}} \|\mathbf{u}\|_0 \text{ 满足 } \mathbf{s} = \mathbf{T}\mathbf{u} \quad (1)$$

其中  $\|\mathbf{u}\|_0$  是表示系数向量  $\mathbf{u}$  中非零项的个数, 在一个随机的冗余字典  $\mathbf{T}$  中寻找信号的稀疏表示, 这是非凸和高度非光滑的, 是一个 NP 难问题.

为了解决这个问题, Mallat 等人引入了匹配追踪(matching pursuit, MP) 算法<sup>[12]</sup>. 其主要思想是采用迭代的贪婪算法, 它在每一次迭代过程中, 从字典里选择最能匹配信号结构的一个原子来逼近信号, 又被称为纯贪婪算法. 这种纯贪婪算法的一个明显缺点就是, 在已选原子组成的子空间上, 信号的扩展可能不是最好的,

因为它不是一个正交投影. 正交匹配追踪算法(orthogonal matching pursuit, OMP)<sup>[13]</sup> 递归地对所选原子的集合进行正交化, 解决了这个问题.

近几年, 匹配追踪算法得到了很大的发展, 显示出很大的优越性. 然而匹配追踪算法由于在算法过程中需要进行大量的内积运算和字典的选择, 因此, 计算量巨大, 限制了它在很多领域中运用. 同时, 匹配追踪算法信号表示的精度问题也限制了其应用.

1995 年, Chen 为了解决信号稀疏表示和分解问题又提出了基追踪(basis pursuit, BP) 算法<sup>[14]</sup>, 把  $(P_0)$  问题转化为  $(P_1)$  问题:

$$(P_1) \min_{\mathbf{u}} \|\mathbf{u}\|_1 \text{ 满足 } \mathbf{s} = \mathbf{T}\mathbf{u} \quad (2)$$

即把最小化  $\|\cdot\|_0$  范数转化为最小化  $\|\cdot\|_1$  范数, 使得问题简单化. 对于最小化  $\|\cdot\|_1$  范数, 我们可以通过线性规划方法来解决. 基追踪去噪(Basis Pursuit Denoising, BPDN)<sup>[15]</sup> 是 BP 算法的推广, 把  $(P_1)$  问题变成无约束优化问题:

$$(P_{1,K}) \min_{\mathbf{u}} \|\mathbf{u}\|_1 + \mathbf{K} \|\mathbf{s} - \mathbf{T}\mathbf{u}\|_2 \quad (3)$$

其中参数  $\mathbf{K}$  控制着表示信号  $\mathbf{s}$  时的失真度.  $(P_{1,K})$  具有二次规划结构, 可以通过很多方法进行求解. 当  $\mathbf{T}$  选择为酉矩阵时存在封闭解:

$$\mathbf{u}_k = \begin{cases} \mathbf{u}_k - \frac{\text{sign}\{\mathbf{u}_k\}}{\mathbf{K}}, & |\mathbf{u}_k| \setminus \frac{1}{\mathbf{K}} \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (4)$$

这也就是所谓的软阈值方法.

在 MP 和 BP 算法的分析中都使用了一个特征  $M$  来描述字典  $\mathbf{T}$  的丰富性, 我们称之为非相干系数. 假定  $\mathbf{T}$  的列向量, 即字典中的原子, 为单位  $\|\cdot\|_2$  范数, 用  $\mathbf{t}_j$  表示, 则  $M$  定义为<sup>[6]</sup>:

$$M = \max_{\substack{j,k \\ j \neq k}} |\mathbf{t}_j^T \mathbf{t}_k| \quad (5)$$

这个标量值在界定追踪算法成功与否中有着重要的作用, 对于 OMP 和 BP 的性能分别有下面的结论:

**定理 1**<sup>[6]</sup> 如果存在一个解满足

$$\|\mathbf{u}\|_1 + \|\mathbf{e}\|_1 < \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{M} \right) \quad (6)$$

则 OMP 算法作为求解  $(P_0)$  问题的逼近算法可以找到其全局最优解.

**定理 2**<sup>[17]</sup> 如存在一个解满足式(6), 则 BP 算法作为求解  $(P_0)$  问题的逼近算法可找到其全局最优解.

上面的结论说明, 虽然  $(P_0)$  是非凸的, 求解非常复杂, 但采用 OMP 算法或 BP 算法作为逼近方法能够找到其全局最优解.

## 3 形态成分分析

形态成分分析(MCA)<sup>[6,7]</sup> 可以看成是 BP 和 MP 算法的结合. 对于任意的输入信号  $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^N$ , 假设信号  $\mathbf{s}$  由

两部分线性组成,用  $s = s_A + s_B$  表示,其中  $s_A, s_B$  分别表示不同类型的分解信号(当然也可假设  $s$  有任意数量的部分组成,为了简单起见,这里仅分为两部分).

同时假设下列条件成立:

(1) 对于第一类信号  $s_A$ , 存在一超完备字典  $T_A \in \mathbb{R}^{M \times L_A}$  (典型地  $L_A \gg M$ ), 使得求解下列问题:

$$A_A^{\text{opt}} = \underset{A}{\text{Arg min}} \|A\|_0 \quad \text{满足 } s_A = T_A A \quad (7)$$

能获得一个非常稀疏的解(即  $\|A_A^{\text{opt}}\|_0$  很小). 式(7)的定义本质上是对信号  $s_A$  为进行超完备变换, 产生表示系数  $A_A$ , 使稀疏性最大化.

(2) 对于第二部分信号  $s_B$ , 求解

$$A_B^{\text{opt}} = \underset{A}{\text{Arg min}} \|A\|_0 \quad \text{满足 } s_B = T_B A \quad (8)$$

能得到一个非常不稀疏的解(即  $\|A_B^{\text{opt}}\|_0$  很大). 这个条件表示字典  $T_A$  能区分两类不同的分解信号.

(3) 类似于字典  $T_A$ , 假设有另一个字典  $T_B \in \mathbb{R}^{M \times L_B}$  也能非常稀疏地表示第二类信号  $s_B$ , 应用到第一类信号时产生非常不稀疏的结果.

这三个假设条件说明 MCA 方法假设对于混合信号中的每一个源信号, 都存在着相对应的能够稀疏表示其的字典, 并且认为该字典仅能稀疏表示该源信号, 对于其他信号不能有效地表示(不是稀疏的).

### 3.1 形态分解

根据上面的假设条件, 信号  $s$  的稀疏表示可以表示为求解下列问题<sup>[6]</sup>:

$$\begin{cases} \{A_A^{\text{opt}}, A_B^{\text{opt}}\} = \underset{\{A_A, A_B\}}{\text{Arg min}} \|A_A\|_0 + \|A_B\|_0 \\ \text{满足 } s = T_A A_A + T_B A_B \end{cases} \quad (9)$$

解决这个问题依然面临着两个困难:(1) 从一个随机冗余字典中寻找信号的稀疏表示是一个 NP 问题, 很难求解;(2) 由于噪声或模型不匹配而使得给定信号难以明确地分离成两部分.

然而, 按照 BP 算法和 MP 算法的思想, 式(9)可以转化为

$$\begin{cases} \{A_A^{\text{opt}}, A_B^{\text{opt}}\} = \underset{\{A_A, A_B\}}{\text{Arg min}} \|A_A\|_1 + \|A_B\|_1 \\ + K \|s - T_A A_A - T_B A_B\|_2 \end{cases} \quad (10)$$

要把上述的思想转变成实际的算法仍需解决下面三个问题:(1) 是否有理论支持?(2) 如何选择字典  $T_A, T_B$ ? (3) 怎样用数值算法来求解这个最优问题?

### 3.2 理论分析

对于式(9), 可以转换为解决下列问题<sup>[6]</sup>

$$\begin{aligned} A_{\text{all}}^{\text{opt}} &= \begin{bmatrix} A_A^{\text{opt}} \\ A_B^{\text{opt}} \end{bmatrix} = \underset{\{A_A, A_B\}}{\text{Arg min}} \left\| \begin{bmatrix} A_A \\ A_B \end{bmatrix} \right\|_0 \\ \text{满足 } s &= [T_A, T_B] \begin{bmatrix} A_A \\ A_B \end{bmatrix} = T_{\text{all}} A_{\text{all}} \end{aligned} \quad (11)$$

由定理 1 和定理 2 有

**定理 3**<sup>[6]</sup> 给定一由类型 A 和类型 B 稀疏组成的信号  $s$ , 如果有

$$\|A_{\text{all}}\|_0 = \|A_A\|_0 + \|A_B\|_0 < \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{1}{M \{T_{\text{all}}\}} \right] \quad (12)$$

则源信号可用 MP 和 BP 方法来恢复.

因此, 由上面的定理, 我们可以推断出, 如果需要, 类型 A 和类型 B 的信号内容可分别由字典  $T_A$  和  $T_B$  中原子的稀疏线性组合而成, 分解过程将表示为式(9)的全局最小, 并且, 通过 MP 或 BP 方法可以成功地恢复出信号.

### 3.1.3 字典选择

字典  $T_A$  和  $T_B$  在 MCA 算法中起着关键的作用. 字典的选择通常可以按照如下的保真度测量函数或者类似的方法来选取:

$$\text{Quality}\{T_A\} = \frac{\sum_k \|A_A^{\text{opt}}(k)\|_0}{\sum_j \|A_B^{\text{opt}}(j)\|_0} \quad (13)$$

其中:  $\begin{cases} A_A^{\text{opt}}(k) = \underset{A}{\text{Arg min}} \|A\|_0, \text{ 满足 } s_A(k) = T_A A \\ A_B^{\text{opt}}(j) = \underset{A}{\text{Arg min}} \|A\|_0, \text{ 满足 } s_B(j) = T_B A \end{cases}$

然而, 这样的字典选择方法通常比较复杂, 为了避免这种复杂性, 字典的选择通常并不是按照理论上的最优选择, 而往往是按照经验选择已知的变换. 例如, 在很多图像处理的应用中, 如图像压缩、分析、合成等等, 需要把图像的纹理部分从分片光滑(cartoon)部分中分离出来, 这时就可以选择一些能较好表示纹理或光滑部分的常用变换, 如下所示:

(1) 光滑部分的字典

( ) 双正交小波变换(Biorthogonal Wavelet Transform, OWT)<sup>[18]</sup>

研究表明小波变换能很好地对自然场景进行稀疏表示, 并且使用 7~9 滤波器和零树编码的双正交小波在图像压缩上取得了良好的效果. 然而双正交小波仅能表示图像中与尺度无关的元素, 而难以表示具有高度各向异性的元素, 因此双正交小波并不是高度各向异性特征的最优表示. 同时由于双正交小波不具有移不变性, 这也会在形态成分分析中产生很多问题.

非抽样小波(Undecimated Wavelet Transform, UWT)<sup>[19]</sup>是滤波中常用的一种小波变换. 由于其不需要抽样, 其冗余因子为  $3J + 1$  ( $J$  为分解尺度). 由于这种完备性也克服了双正交小波变换的非移不变性.

( ) / 多孔 0 算法( $\hat{A}$  trous 算法)<sup>[20]</sup>

/ 多孔 0 算法能很好地应用于各向同性特征的检测中. 分解方式为:  $I(x, y) = c_0(x, y) + \sum_{j=1}^J w_j(x, y)$ , 其中  $c_0$  表示原始图像的平滑部分,  $w_j$  表示在尺度为  $2^j$  下

像的细节部分. 由于航天图像中很多元素如行星, 星云等都为各向同性元素, 因此,  $l$  多孔 $0$ 算法在航天图像处理中获得了很大的成功.

#### ( )局部脊波变换(Local Ridgelet Transform)<sup>[8]</sup>

脊波变换实质是 Radon 变换角度切片上的一维小波变换, 它是图像中线性元素的最优表示. Ridgelet 变换在检测图像的直线过程中, 为防止块效应, 采用重叠分块的方法, 具有较高的冗余度, 其算法复杂度为  $O(n^2 \log_2 n)$ .

#### ( )Curvelet 变换<sup>[9, 21]</sup>

图像的边缘往往不是直线型的, 脊波表示的系数不再是稀疏的, 为了能稀疏表示图像的边缘, Cand s 等人提出了 Curvelet 理论. 目前使用的 Curvelet 算法有两种: 第一代 Curvelet 变换<sup>[9]</sup>是由脊波理论衍生而来的, 其基本思想是: 当把曲线无限分割时, 可以近似地把每一小段看作是直线段, 然后对这些直线段应用脊波变换进行分析. 第二代 Curvelet 变换<sup>[21]</sup>比第一代 Curvelet 实现更简单, 其主要思想就是对频域划分为楔形区域, 然后对这些楔形区域采用具有方向的局部傅里叶基进行变换.

#### (2) 纹理部分的字典

#### ( ) (局部) 离散余弦变换((Local DCT)

DCT 变换是一正交变换, 它适合于对图像平滑部分或周期部分的稀疏表示. 从本质上讲, DCT 变换的系数代表着类似于傅立叶分析所获得的频率内容. 处理非平稳信号中, DCT 变换主要用于分块中. 由于该变换采用重叠分块的方法, 具有较高的冗余度, 因此 DCT 变换是一种超完备变换, 其快速算法的复杂度为  $O(n^2 \log_2 n)$ .

#### ( )Gabor 变换

Gabor 变换是在纹理研究中比较常用的方法, 其本质是局部离散傅立叶变换. 由于其局部化是通过有重叠的信号窗来获得的, 因此 Gabor 变换的冗余度是可以控制的. 适当地选择重叠方式和窗口时, Gabor 变换正逆变换的算法复杂度均为  $O(n^2 \log_2 n)$ .

### 3.1.4 数值优化算法

在图像处理过程中, 求解式(10)的最优化问题面临着两个难题: (1) 由于所涉及的维数太大 ( $N \sim 10^6$ ,  $L \sim m \sim N$ ), 计算机存储量要求很高; (2) 由于表示向量  $A_{11}$  的长度  $L$  较大 (典型地  $L \sim m \sim N$ ), 所需的处理内存比较大. 因此, 需要把式(10)进一步进行转换.

定义  $s_A = T_A A$ ,  $s_B = T_B B$ . 给定  $s_A$ , 可以恢复  $A = T_A^+ + r_A$ , 其中  $r_A$  表示字典  $T_A$  的零空间中任意一向量,  $T_A^+ = T_A^T (T_A T_A^T)^{-1}$  是  $T_A$  的 Moore-Penrose 伪逆. 代入式(10)得到

$$\begin{aligned} \left\{ s_A^{\text{opt}}, s_B^{\text{opt}} \right\} = \underset{\{s_A, s_B, r_A, r_B\}}{\text{Arg min}} & \left\| T_A^+ s_A + r_A \right\|_1 + \left\| T_B^+ s_B + r_B \right\|_1 \\ & + K \left\| s - s_A - s_B \right\|_2^2 \\ & \text{满足 } T_A r_A = 0, T_B r_B = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

虽然上式在把未知量由表示向量  $A_{11}$  变成两类信号  $s_A, s_B$  的同时, 引入了残余向量  $r_A, r_B$ , 然而根据边界函数、BCR (block2coordinate relaxation) 算法<sup>[22]</sup>和最大后验概率估计 (Maximal A Posteriori estimation, MAP), 完全可以设置  $r_A = 0, r_B = 0$ <sup>[6]</sup>, 于是最小化问题变为

$$\min_{\{s_A, s_B\}} \left\| T_A^+ s_A \right\|_1 + \left\| T_B^+ s_B \right\|_1 + K \left\| s - s_A - s_B \right\|_2^2 \quad (15)$$

为此, Stark 等人<sup>[11]</sup>在 BCR 方法的基础上, 给出了如下 MCA 的数值实现:

(1) 初始化  $L_{\text{max}}$ 、迭代次数和阈值  $D = K \# L_{\text{max}}$

(2) 进行如下的  $J$  次迭代:

A 部分: 假设  $s_A$  不变, 更新  $s_B$ :

计算剩余量:  $R = s - s_A$ ;

计算  $A_B = T_B^+ R$ ;

软阈值法计算系数  $A_B$ , 阈值为  $D$  得到系数  $\hat{A}_B$ ;

通过  $s_B = T_B \hat{A}_B$  重构  $s_B$ .

B 部分: 假设  $s_B$  不变, 更新  $s_A$ :

计算剩余量:  $R = s - s_B$

计算  $A_A = T_A^+ R$

软阈值法计算系数  $A_A$ , 阈值为  $D$  得到系数  $\hat{A}_A$ ;

通过  $s_A = T_A \hat{A}_A$  重构  $s_A$ .

(3) 修改阈值  $D = D - K$

(4) 如果  $D > K$  转至步骤(2), 否则结束.

## 4 形态成分分析的发展与应用

由前述的 MCA 的思想和基本特性可知, 即使在有含噪的情况下, 它依然是一种有效的稀疏表示方法. 近两年, 形态成分分析方法受到了越来越多学者的关注. Boin 等人<sup>[23-25]</sup>将 MCA 扩展到多通道数据情况下, 提出了 MMCA (Multichannel Morphological Component Analysis) 和 GMCA (Generalized MCA) 方法. MMCA 是在多通道数据情况下 MCA 方法的一种扩展, 实验结果表明, 较多的数据更有利于提高图像的分离能力, 并有利于改善算法的性能. GMCA 是一种快速有效的盲源分离方法, 它充分利用了形态多样性和稀疏性的特点, 把源看作是形态分量的线性组合, 并利用稀疏性来估计源和混合矩阵, 取得了较好的实验结果. 同时, Boin 等人为了加速 MCA 的收敛速度, 利用字典的非相关性, 提出了一种 MOM (Mean Of Max) 阈值选取方法<sup>[26]</sup>, 实验结果表明, 该阈值选取方法对于 MCA 算法有一定的改进, 并且能防

止源信号的错误检测. Starck 等人<sup>[7]</sup>在基本的 MCA 方法中引入了全变差 (total variation, TV) 规则化方案, 以更好地指导分离过程和减少振铃效应.



图1 基于MCA的图像分解

同时, 随着许多学者研究的不断深入, MCA 的应用得到了初步发展, 特别是在信号和自然图像分解、去噪以及修复<sup>[6, 7, 29, 30]</sup>等领域中取得了良好的效果. 图 1, 2 显示了 MCA 算法在图像分解和图像修复中的应用, 图 3 显示了 GMCA 在彩色图像中去噪的结果.

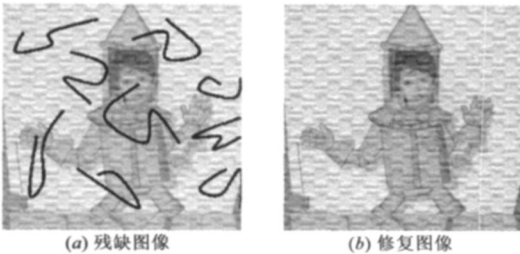


图2 基于MCA的图像修复



图3 基于GMCA的图像去噪

## 5 现在的主要问题和进一步的研究方向

MCA 是信号和图像稀疏表示方面一项富有重要成效的表示方法, 它的提出得到了许多研究者的关注, 它的应用范围也在不断的推广, 然而由于其崭新的理论面貌和独到的应用特点, MCA 还存在着很多问题值得深入研究.

(1) 选择何种类型的原子来构造合适的字典和级联字典族

MCA 方法分离信号主要的步骤就是选择字典, 而该方法的一个重要假设是: MCA 方法假设对于混和信号中的每一个源信号, 都存在着相对应的能够稀疏表示该源信号的字典, 并且认为该字典仅能稀疏表示该源信号, 对于其他源信号不能稀疏表示. 而现有的字典选择往往是根据经验, 因此研究何种结构的信号适用

于哪一类字典以获得好的逼近是十分必要的. 目前字典主要涉及的原子有各种小波变换, 余弦变换, Ridgelet 变换, Curvelet 变换等. 由于图像的内容是很复杂的, 因此研究能很好稀疏表示各种图像内容的变换是很有意义的, 特别是随着近年来多尺度几何分析<sup>[27, 28]</sup> 将为 MCA 方法字典的选择提供良好的基础.

(2) 构造 Curvelet 变换等冗余多尺度变换的快速算法, 降低算法的复杂度

MCA 中字典选择的关键是字典有快速算法, 然而现有的这些多尺度几何分析方法往往运算复杂度比较高, 严重限制了 MCA 算法的运行速度. 如目前第一代 Curvelet 变换需要子带分解、平滑分块、Ridgelet 变换等步骤, 实现起来比较复杂, 而且第一代 Curvelet 变换具有巨大的数据冗余量. 为了解决这个问题, E. J. Candes 等人又提出了快速 Curvelet 变换, 即第二代 Curvelet 变换, 该方法比第一代 Curvelet 实现更简单, 也更容易理解. 但第二代 Curvelet 变换依然存在着许多开放的问题, 比如: 对于能否建立 Curvelets 的正交基这还是未知的; 另外, 构造紧支撑 Curvelet 紧致集也是一个很重要的问题; Contourlet 继承了 Curvelet 的各向异性尺度关系, 直接定义于数字域, 然后再推广到连续域并进行理论分析, 其数学基础还需完善. 因此, 构造 Curvelet 变换等冗余多尺度变换的快速算法, 降低算法的复杂度是十分有必要的.

(3) 建立有效的数值优化算法, 提高算法的收敛性

在现有 MCA 方法中, 上面最优问题的数值求解是通过迭代阈值算法实现的, 随着迭代的进行阈值不断线性减少至零. 其中阈值的选取对算法的收敛速度有很大的影响, 一个好的阈值方法必须具备以下三方面的要求: (1) 具有适用性, 能适合于各种不同的字典; (2) 低的计算量; (3) 不需要大量的迭代次数. 文献[25]提出了一种 MOM 的机制, 改善了 MCA 算法的性能, 提高了 MCA 方法的收敛速度. 然而, 好的阈值选择策略还没有受到研究者的高度重视, 目前的研究成果也很少. 因此, 在这方面的研究是很有必要的.

同时, 以非相干字典为基础的一系列理论证明得到了进一步的改进, 如何充分利用字典的非相干性, 采用有效的数值算法求解最优问题, 以提高算法的收敛速度, 这也是一个研究热点.

(4) 建立基于 MCA 稀疏分解的评价方法

目前对于稀疏分解的评价方法还未得到深入研究, 研究者在研究稀疏分解算法过程中, 评价的方法也不统一, 常用的评价指标包括有重构信噪比, 峰值信噪比等, 是否这些评价方法适用于基于 MCA 稀疏分解的方法? 是否还有更佳的评价体系? 这些问题的研究将引起人们的逐步重视.

### (5) 推广 MCA 的应用领域

形态成分分析在自然图像的分解, 去噪和修复等领域取得了良好的效果, 然而对于在复杂背景图像中的应用, 如 SAR 图像, 现在国际上还未见这方面的研究成果. 而随着 SAR 图像的广泛应用, SAR 图像处理日益成为 SAR 技术的研究重点之一. 特别是从 SAR 图像问世以来, 相干斑噪声一直困扰着许多研究工作者. 由于现有的各种 SAR 滤波方法存在的缺陷, 很有必要提出一种适用于复杂背景下的高效率的滤波算法, 为后续的进一步处理提供良好的基础. 值得注意的是, MCA 算法中的主要步骤))) 基追踪去噪方法(Basis Pursuit Denoising, BPDN)在分解信号或图像的同时, 也自动地提取出噪声成分, 完成了对信号或图像的去噪处理. 但其目前的实验结果都是针对加性噪声的自然图像来实现的, 而对于具有乘性噪声和复杂背景 SAR 图像, 目前并未有涉及这方面的研究. 而近年来, 随着多尺度几何分析的发展, 包括 Wavelet、Ridgelet、Curvelet 等在内的各种多尺度几何分析方法在 SAR 图像去噪方面都取得了良好的效果, 这些超完备冗余多尺度几何变换又是 MCA 方法中字典的主要构成成分. 因此把形态成分分析应用于 SAR 图像去噪等方面还是非常具有研究前景的.

## 6 结束语

信号和图像分解(分离)在信号、图像处理中有着重要的作用, 独立成分分析(ICA)的方法以非高斯源信号为研究对象, 在其统计独立的假设下, 对混合信号进行盲分离, 从而较好地分离出隐含在混合信号中的独立信号源. 而稀疏成分分析(SCA)和形态成分分析(MCA)虽然都是基于稀疏表示的信号和图像分解(分离)方法, 但二者主要有两方面的区别: 一是在稀疏成分分析中只采用一个字典对信号进行稀疏化, 而形态成分分析对不同的源信号采用不同的字典进行稀疏表示; 二是这两种方法采用了不同的数值优化方法. 由于形态成分分析方法提出的时间才短短几年, 在其理论和应用上还有许多可以进一步完善的地方, 但由于其在信号和图像稀疏表示中的良好效果, 我们相信在该领域的研究必然有着光明的前景.

### 参考文献:

[1] A Hyvarinen, J Karhunen, E Oja. Independent component analysis[M]. New York: Wiley, 2001.  
 [2] A Belouchrani, K A Meraim, F Cardoso, E Moulines. A blind source separation technique based on second order statistics[J]. IEEE transactions on Signal Processing, 1997, 45(2): 434-444.

[3] B A Pearlmutter, V K Potluru. Sparse separation: Principles and tricks[A]. Proceedings of International Society for Optical Engineering(SPIE)[C]. Orlando, FL, USA, 2003, 5102: 1- 4.  
 [4] P G Georgiev, F Theis, A Cichocki. Sparse component analysis and blind source separation of underdetermined mixtures[J]. IEEE Transactions on Neural Network, 2005, 16(4): 992-996.  
 [5] M Zibulevsky, B A Pearlmutter. Blind source separation by sparse decomposition in a signal dictionary [J]. Neural Computation, 2001, 13(4): 863- 882.  
 [6] J L Starck, M Elad, D Donoho. Redundant multiscale transforms and their application for morphological component analysis[J]. Advances in Imaging and Electron Physics, 2004, 132(82): 287- 348.  
 [7] J L Starck, M Elad, D Donoho. Image decomposition via the combination of sparse representation and a variational approach [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2005, 14(10): 1570- 1582.  
 [8] E J Candès. Ridgelets: theory and applications[D]. USA: Department of Statistics, Stanford University, 1998.  
 [9] E J Candès, D L Donoho. Curvelet: A Surprisingly Effective Nonadaptive Representation for Objects with Edges[M]. Curve and Surface Fitting, Vanderbilt University Press, 1999.  
 [10] E Pennec, S Mallat. Sparse geometric image representation with bandelets[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2005, 14(4): 423- 438.  
 [11] M N Do, M Vetterli. The Contourlet transform: An efficient directional multiresolution image representation [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2005, 14(12): 2091 - 2106.  
 [12] S Mallat, Z Zhang. Matching pursuit with time frequency dictionaries[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1993, 41(12): 3397- 3415.  
 [13] Y C Pati, R Rezaifar, P S Krishnapasad. Orthogonal matching pursuit recursive function approximation with applications to wavelet decomposition[A]. In Proceedings of the 27th Annual Asilomar Conference in Signals, Systems, and Computers [C]. Los Alamitos: IEEE, 1993. 40- 44.  
 [14] S S Chen, Basis Pursuit[D]. Department of Statistics, Stanford University, Stanford, CA, 1995.  
 [15] S Chen, D Donoho, M Saunders. Atomic decomposition by basis pursuit[J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 1999, 20(1): 33- 61.  
 [16] J Tropp. Greed is good: algorithmic results for sparse approximation[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2004, 50(10): 2231- 2242.  
 [17] D Donoho, M Elad. Maximal sparsity representation via  $l_1$  minimization[A]. Proceedings of the National Academy of Science[C]. USA, 2003, 100: 2197- 2202.

- [18] M Antonini, M Barlaud, P Mathieu, I Daubechies. Image coding using wavelet transform[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1992, 1(2): 205- 220.
- [19] J L Stark, J Fadili, F Murtagh. The undecimated wavelet decomposition and its reconstruction[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2007, 16(2): 297- 309.
- [20] J L Starck, F Murtagh, A Bljaoui. Image Processing and Data Analysis: the Multiscale Approach[M]. Cambridge university press, 1998.
- [21] E J Candès, L Demanet, D L Donoho, L Ying. Fast discrete Curvelet transforms[J]. Multiscale Modeling and Simulation, 2006, 5(3): 861- 899.
- [22] A Bruce, S Sardy, P Tseng. Block coordinate relaxation method for nonparametric signal denoising[A]. Proceedings of International Society for Optical Engineering(SPIE)[C]. Orlando, FL, USA, 1998, 3391: 75- 86.
- [23] J Bobin, Y Moudden, J L Starck, M Elad. Morphological diversity and source separation[J]. IEEE Signal Processing Letters. 2006, 13(7): 409- 412.
- [24] J Bobin, Y Moudden, J L Starck. Enhanced sourced separation by morphological component analysis[A]. In Proceedings of International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing( ICASSP) [C]. Toulouse, France: IEEE Press, 2006. 833- 836.
- [25] J Bobin, J L Starck, M J Fadili, Y Moudden. Sparsity and morphological diversity in blind source separation[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2007, 16(11): 2662 - 2674.
- [26] J Bobin, J L Starck, J Fadili, Y Moudden, D L Donoho. Morphological component analysis: an adaptive thresholding strategy[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2007, 16(11): 2675- 2681.
- [27] 焦李成, 孙强. 多尺度变换域图像的感知与识别: 进展和展望[J]. 计算机学报. 2006, 29(2): 177- 193.
- Jiao LiCheng, Sun Qiang. Advances and perspective on image perception and recognition in multiscale transform domains [J]. Chinese Journal of Computers, 2006, 29(2): 177- 193. (in Chinese)
- [28] 焦李成, 谭山. 图像的多尺度几何分析: 回顾和展望[J]. 电子学报. 2003, 31(12A): 1975- 1981.
- Jiao LiCheng, Tan Shan. Development and prospect of image multiscale geometric analysis [J]. Acta Electronica Sinica, 2003, 31(12A): 1975- 1981. (in Chinese)
- [29] M Elad, J L Starck, D Donoho, P Querre. Simultaneous cartoon and texture image inpainting using morphological component analysis(MCA)[J]. Journal on Applied and Computational Harmonic Analysis(ACHA), 2005, 19(3): 340- 358.
- [30] M J Fadili, J L Starck. Em algorithm for sparse representation based image inpainting[A]. IEEE International Conference on Image Processing(ICIP)[C]. Genoa, Italia, 2005: 61- 63.

#### 作者简介:



**李映** 女, 副教授. 1969年4月出生于陕西宝鸡. 1991年、1999年和2002年分别在西北工业大学、空军工程大学和西安电子科技大学获工学学士、硕士和博士学位. 2005年从西北工业大学计算机科学与技术博士后流动站出站留校工作, 从事图像处理和模式识别方面的有关研究.  
E-mail: lybyp@nwpu.edu.cn



**张艳宁** 女, 教授、博士生导师. 1967年11月出生于陕西武功. 1988年在大连理工大学获工学学士学位, 1993年和1996年在西北工业大学获工学硕士和博士学位. 现为西北工业大学计算机信息工程系主任, 主要从事计算机图像和视频处理等方面的研究工作.